Exercice

- Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
- On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(3;2)$ et $(1;-2)$.
- On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(-3;2)$, $(2;-3)$, $C(3;1)$.
- Pour tout point M du plan, on pourra noter $(x_M;y_M)$ les coordonnées du point M.

Une représentation graphique sera réalisée au fil des questions sur une feuille à part et à rendre.

Cette représentation graphique permet de vérifier ses résultats mais ne constitue pas une preuve. Tous les résultats seront justifiés par le calcul.

1) a) $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormal du plan signifie que $\vec{\imath}\perp\vec{\jmath}$ (les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux) et $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=1$ (les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont de normes 1).

   b) Les coordonnées du point A dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ sont $(-3;2)$ signifie

$$\overrightarrow{OA}=(-3)\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$$

   c) Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ sont $(3;2)$ signifie

$$\vec{u}=3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$$

2) a) Puisque $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$,

   • les coordonnées du vecteur $2\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}2\times3\\2\times2\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.

   • les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}3+1\\2+(-2)\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

   • les coordonnées du vecteur $\vec{u}-4\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}3-4\times1\\2-4\times(-2)\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$.

b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 2-(-3) \\ (-3)-2 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3) a) Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D + 3 \\ y_D - 2 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x_D + 3 &= 1 \\ y_D - 2 &= 4 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x_D &= -2 \\ y_D &= 6 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow D\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Déterminons les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{CE} = \vec{u}$.

On a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CE} = \vec{u} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x_E - 3 &= 3 \\ y_E - 1 &= 2 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x_E &= 6 \\ y_E &= 3 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow E\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Le point F est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie $\overrightarrow{AF} = \vec{u}$.

On a $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F - x_A \\ y_F - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F + 3 \\ y_F - 2 \end{pmatrix}$ et on a $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AF} = \vec{u} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_F + 3 &= 3 \\ y_F - 2 &= 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_F &= 0 \\ y_F &= 4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow F\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4) a) Les coordonnées du milieu P du segment $[AC]$ sont $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_C}{2} \\ \frac{y_A+y_C}{2} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \frac{(-3)+3}{2} \\ \frac{2+1}{2} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) Le point Q est le symétrique du point B par rapport au point C signifie que le point C est le milieu du segment $[BQ]$.

Les coordonnées du milieu du segment $[BQ]$ sont $\begin{pmatrix} \frac{x_B+x_Q}{2} \\ \frac{y_B+y_Q}{2} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \frac{2+x_Q}{2} \\ \frac{-3+y_Q}{2} \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du point C sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} \frac{2+x_Q}{2} &= 3 \\ \frac{-3+y_Q}{2} &= 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 + x_Q &= 6 \\ -3 + y_Q &= 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_Q &= 4 \\ y_Q &= 5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow Q\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5) a) La norme $\|\vec{v}\|$ du vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \sim 2.24$.

b) La distance AB entre les points A et B est

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \sim 7.07$$

c) Le point $R(4;4)$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ si et seulement si $AR = BR$.

La distance AR entre les points A et R est

$$AR = \|\overrightarrow{AR}\| = \sqrt{(x_R - x_A)^2 + (y_R - y_A)^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

La distance BR entre les points B et R est

$$BR = \|\overrightarrow{BR}\| = \sqrt{(x_R - x_B)^2 + (y_R - y_B)^2} = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

Le point $R(4;4)$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

d) Le point O appartient au cercle de centre A et de rayon 4 si et seulement si $AO = 4$.

$$AO = OA = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} \sim 3.61$$

On a $AO \neq 4$ de telle sorte que le point O n'appartient au cercle de centre A et de rayon 4.

6) a) Le déterminant $\det(\vec{u};\vec{v})$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

$$\begin{aligned}\det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times (-2) - 2 \times 1 \\ &= -8\end{aligned}$$

Puisque $\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$, on peut en déduire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) Calculons le déterminant $\det\left(\overrightarrow{BG};\overrightarrow{BC}\right)$ pour le point $G\left(\frac{3}{2};-5\right)$.

On a $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2 \\ (-5) - (-3) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 1 - (-3) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\det\left(\overrightarrow{BG};\overrightarrow{BC}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\times 4-(-2)\times 1$$

$$=-2+2$$

$$=0$$

Puisque $\det\left(\overrightarrow{BG};\overrightarrow{BC}\right)=0$, on peut en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à l'alignement des points B, C, G.

c) Le point $S(-4;2)$ appartient à la parallèle en A à la droite (BC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AS};\overrightarrow{BC}\right)=0$.

On a $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} x_S-x_A \\ y_S-y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} (-4)-(-3) \\ 2-2 \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

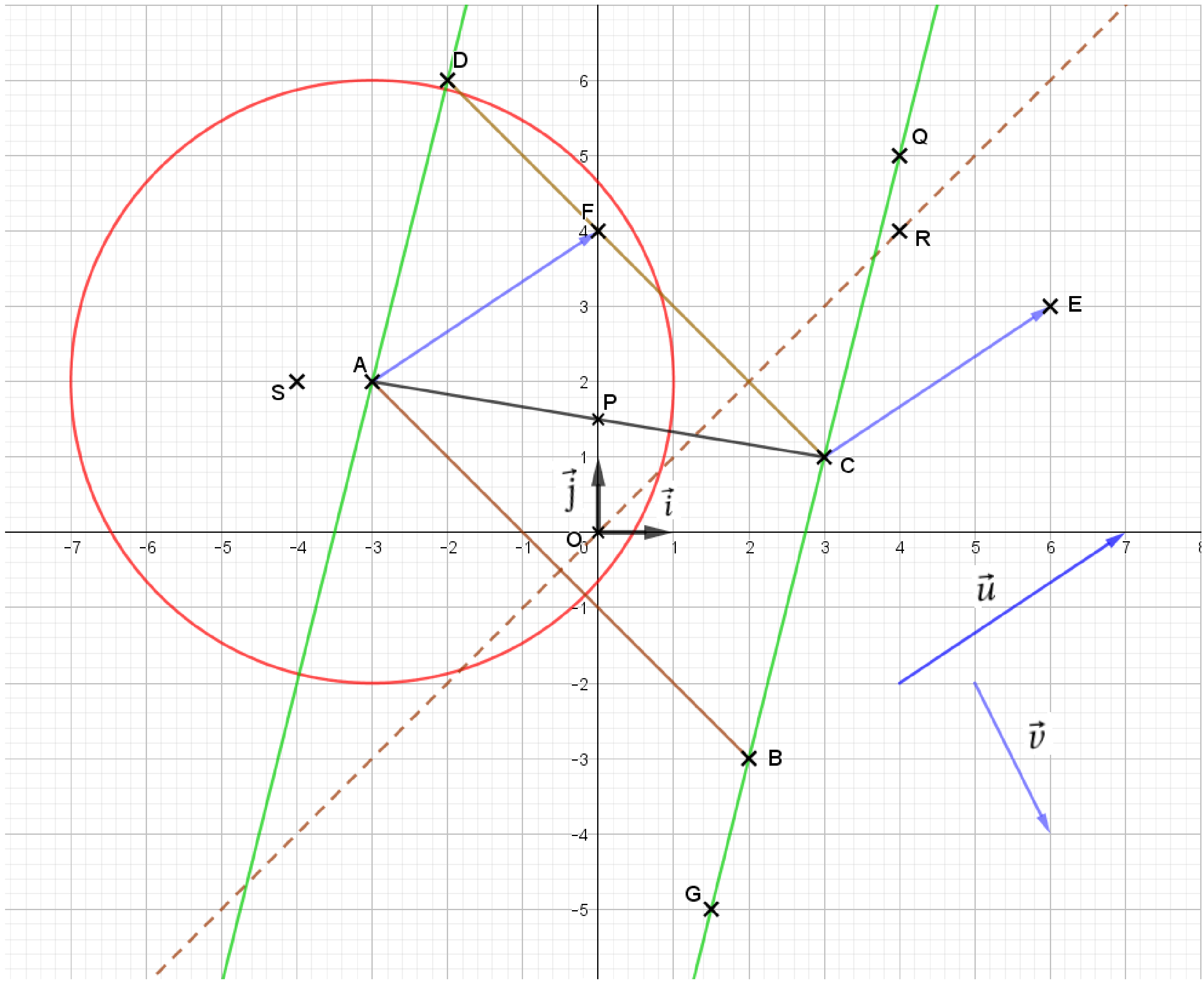
On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-(-3) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\det\left(\overrightarrow{AS};\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times 4-0\times 1$$

$$=-4$$

Puisque $\det\left(\overrightarrow{AS};\overrightarrow{BC}\right)\neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires de telle sorte que le point $S(-4;2)$ n'appartient pas à la parallèle en A à la droite (BC) .



D
Q
F
R
E
A
S
P
C
O
B
G
$\vec{i}$
$\vec{j}$
$\vec{u}$
$\vec{v}$